Leçon 246 - Séries de Fourier. Exemples et application.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique. Quitte à dilater, on suppose que $T = 2\pi$. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

1. Définition de la série de Fourier d'une fonction périodique intégrable. —

1. *Définitions et notations.* —

- On se place d'abord sur $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\mathbb{C})$, avec $< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.
- Def : $e_n(x) = e^{in2\pi x}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. C'est une famille orthonormée. On appelle polynôme trigonométrique une combi lin des e_n.
- Def : Pour $f \in L^2$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx =< f, e_n >$.
- Rem : Pour $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$, on a $c_n = c_n(P)$.
- Def de $S_N(f)$, la somme partielle de la série de Fourier de f.
- Rem : $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx$ ne dépend pas de a.
- Def : Comme $e_n(x) = \cos(nx)+i\sin(nx)$, un polynôme trigonométrique $\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$ s'écrit aussi de la forme $\frac{a_0}{0} + \sum_{n=1}^{N}(a_n cos(nx) + b_n sin(x)n$ avec $a_m = c_m + c_{-m}$, $b_m = i(c_m - c_{-m})$.
- Rem : Pour $c_n(f)$ coefficients de Fourier de f, on a alors $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(nx)dx$, pareil pour b_n.

2. *Propriétés des coefficients de Fourier.* —

- Si f est paire, les b_n sont nuls. Si f est impaire, les a_n sont nuls.
- Si une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{T}$, sa somme est égale à sa série de Fourier.
- Si f est de classe C^k, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.
- $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n(x)$ est aussi le projeté orthogonal de f sur Vect(e_n, $-N \leq n \leq N$), qui converge donc dans L^2 vers le projeté orthogonal sur $\overline{Vect(e_n)}$. On a donc une convergence dans L^2 de la série de Fourier de f.
  De plus, $\|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \inf_{g\in P_N} \|f - g\|_2^2$.
- Lemme de Riemann-Lebesgue : $c_n(f) \to_{|n|\to+\infty} 0$
- $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
- Propriétés sur les a_n et b_n.

3. *Des exemples.* —

- Exemples du Z-Q.

2. Différents modes de convergence. —

1. *Convergence au sens de Césaro.* —

- Def : $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$,$F_N := \frac{1}{N}.\sum_{n=0}^{N-1} D_n$.
- **Dev** : Théorème de Féjer : La suite des F_N est une approximation de l'unité et $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f $2\pi - périodique$ continue.
- Rem : Si f admet juste une limite à droite et à gauche en tout point, alors $F_N * f(x) \to_N \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ponctuellement.
- Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0(\mathbb{T})$ pour $\|.\|_\infty$, donc denses dans les $L^p(\mathbb{T})$, car $C^0(\mathbb{T})$ y est dense pour la norme L^p.
  $(e_n)_n$ est donc une famille totale des L^p.
- Les fonctions polynomiales sont denses dans $C^0(K)$ pour tout K compact de $\mathbb{R}$.

2. *Base hilbertienne de Fourier et convergence L^2.* —

- Inégalité de Bessel : $\sum_n |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$.
- Théorème de Bessel-Parseval : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de L^2.
- Les $(cos(2\pi nx))_n$ et $(sin(2\pi nx))_n$ forment donc une $\mathbb{R}$-base de L^2.
- Def : C^k par morceaux
- Égalité de Parseval : Pour f 2π-périodique et continue par morceaux, les $(c_n)_n$, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont de carré sommable et $\sum_n |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_n(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \|f\|_2^2$.
- Corollaire : Pour $\sum_n \alpha_n z^n$ série entière de rayon de convergence R, pour tout $r \in]0, R[$, on a : $\sum_{n\geq0} |\alpha_n|^2.r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2dt$.
- Corollaire : $S_N(f)$ converge vers f en norme L^2.

3. *Convergences ponctuelle et uniforme.* —

- Théorème : Si f est continue, et si $\sum |c_n(f)| < +\infty$, alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f.
- Corollaire : Si f est de classe C^1, alors $\sum |c_n(f)| < +\infty$, et $S_N(f)$ CV unif vers f.
- Théorème de convergence ponctuelle : Soit f 2π-périodique et intégrable, qui admet en un x des limites à droite et à gauche.
  Alors $S_N(f)(x)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
- Théorème de Dirichlet : Si f est C^0 et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f. Si f est juste C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers $x \to \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
- Rem : Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge.
- Le phénomène de Gibbs et son dessin.

3. Aplications. —

1. *Calculs de sommes et de séries.* —

- Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = \chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]}$ sur$[0, \pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = |x|$ sur $] - \pi, \pi[$, la formule de Parseval nous donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- Formule sommatoire de Poisson : Soit f de classe C^1 telle telle que $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$.
  Alors la fonction $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$ est bien définie, continue, et 1-périodique, et la fonction $f^*(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-2i\pi nx}dx$ est bien définie, et l'on a :
  $S(t) = \frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f^*(n)e^{im2\pi t}$
- Corollaire du Gourdon.

2. *Liens entre régularité de f et de ses coefficients de Fourier. —*
   - Z-Q : Théorème de régularité liant f à ses coeffs de Fourier
3. *Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires sur des domaines simples. —*
   - Concept de solution stationnaire.
   - **Dev** : Equation de la chaleur sur le cercle : Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, l'équation différentielle $\partial_t u - \partial_x(\partial_x u) = 0$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f(t,.) \to_{t\to 0^+} u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.
     C'est pour résoudre des équations de cette forme que la théorie de Fourier a été inventée.
   - On peut aussi résoudre l'équation des ondes ou l'équation de Laplace avec la transformation de Fourier.

Références

Gourdon : Inégalité de Parseval.Egalité de Parseval. Formule sommatoire de Poisson.
Hauchecorne : Contre-Exemple de fonction dont dont la série de Fourier divege.
Zuily, Queffélec : Equation de la chaleur sur le cercle.(Dev)
Faraut : Théorème de Féjer(Dev), Calcul de $\sum_k \frac{1}{k^2}$, phénomène de Gibbs.

June 11, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*